
GROUPE DE BRAUER NON RAMIFIÉ DE QUOTIENTS PAR UN GROUPE FINI

par

J.-L. Colliot-Thélène

Résumé. — Soit k un corps, G un groupe fini, $G \hookrightarrow SL_{n,k}$ un plongement. Pour k algébriquement clos, Bogomolov a donné une formule pour le groupe de Brauer non ramifié du quotient $SL_{n,k}/G$. On examine ce que donne sa méthode sur un corps k quelconque (de caractéristique nulle). Par cette méthode purement algébrique, on retrouve et étend des résultats obtenus par Harari et par Demarche au moyen de méthodes arithmétiques, comme la trivialité du groupe de Brauer non ramifié pour $k = \mathbf{Q}$ et G d'ordre impair.

Abstract. — Let k be a field, G a finite group, $G \hookrightarrow SL_{n,k}$ an embedding. For k an algebraically closed field, Bogomolov gave a formula for the unramified Brauer group of the quotient $SL_{n,k}/G$. We develop his method over any characteristic zero field. This purely algebraic method enables us to recover and generalize results of Harari and of Demarche over number fields, such as the triviality of the unramified Brauer group for $k = \mathbf{Q}$ and G of odd order.

1. Introduction

Soient k un corps de caractéristique zéro, \bar{k} une clôture algébrique de k , et $\mathfrak{g} = \text{Gal}(\bar{k}/k)$. À toute k -variété algébrique géométriquement intègre W , de corps des fonctions $k(W)$, on associe d'une part son groupe de Brauer cohomologique $\text{Br}(W)$, d'autre part le groupe de Brauer non ramifié $\text{Br}_{nr}(k(W)/k)$ qu'on notera ici simplement $\text{Br}_{nr}(k(W))$. Pour la définition et les propriétés de base de ces groupes, on renvoie à [6], [2] et [4]. Rappelons simplement que si W est lisse sur k , alors la restriction au point générique induit une inclusion

$$\text{Br}(W) \hookrightarrow \text{Br}(k(W))$$

et que si W est projective et lisse, alors cette inclusion induit un isomorphisme

$$\mathrm{Br}(W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Br}_{nr}(k(W)).$$

Soit $n \geq 2$ un entier, $X = SL_{n,k}$ et G un groupe fini vu comme k -groupe constant, et $G \subset SL_{n,k}$ un k -plongement. Notons Y l'espace homogène quotient X/G . Le corps des fonctions $k(Y)$ de Y est le corps $k(X)^G$ des invariants du corps des fonctions $k(X)$ sous l'action de G .

Ces notations seront conservées dans tout l'article.

On se propose d'examiner le groupe de Brauer non ramifié $\mathrm{Br}_{nr}(k(Y))$. Ce groupe (à isomorphisme non unique près) ne dépend que de G , il ne dépend ni de n ni du plongement $G \subset SL_{n,k}$.

Comme Y est une k -variété lisse intègre, on a $\mathrm{Br}_{nr}(k(Y)) \subset \mathrm{Br}(Y)$.

On va suivre ici la méthode purement algébrique qu'avait utilisée Bogomolov ([1], [4, Thm. 7.1]) lorsque k est algébriquement clos.

Ceci permet d'étendre certains des résultats établis par des méthodes arithmétiques par Harari [7] et par Demarche [5] sur le sous-groupe « algébrique »

$$\mathrm{Br}_{nr,1}(k(Y)) := \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}_{nr}(k(Y)) \rightarrow \mathrm{Br}(\overline{k}(Y))],$$

sous-groupe formé des classes qui s'annulent par passage au corps des fonctions $\overline{k}(Y)$ de $\overline{Y} = Y \times_k \overline{k}$.

En particulier, on montre ici (Corollaire 2.8) que pour tout corps k de caractéristique zéro ne possédant qu'un nombre fini de racines de l'unité, pour $Y = SL_{n,k}/G$ avec G fini constant d'ordre premier au cardinal du groupe des racines de l'unité dans k , on a $\mathrm{Br}(k) = \mathrm{Br}_{nr}(k(Y))$.

Etant donné un corps k de caractéristique zéro, pour tout premier p impair et tout entier $r \geq 1$, l'extension $k(\mu_{p^r})/k$ est cyclique. Il en est encore ainsi pour $p = 2$ si -1 est un carré dans k .

On note $\mathrm{Cyc}(G, k)$ la condition :

Pour tout sous-groupe cyclique $\mathbf{Z}/2^r \subset G$, l'extension $k(\mu_{2^r})/k$ est cyclique.

Pour A un groupe abélien, $n > 0$ un entier et l un nombre premier, on note $A[n] \subset A$ le sous-groupe annulé par n et on note $A\{l\} \subset A$ le sous-groupe de torsion l -primaire.

2. Les résultats

On note $\mathrm{Br}_{nr}^0(k(Y)) \subset \mathrm{Br}(Y)$ le groupe de Brauer normalisé, c'est-à-dire le groupe des éléments qui s'annulent en l'image du point $1 \in SL_n(k)$.

On a la suite exacte de restriction-inflation

$$0 \rightarrow H^2(G, k(X)^\times) \rightarrow \mathrm{Br}(k(Y)) \rightarrow \mathrm{Br}(k(X)).$$

Lemme 2.1. — Soit $H_{nr}^2(G, k(X)^\times) \subset H^2(G, k(X)^\times) \subset \text{Br}(k(Y))$ le sous-groupe formé des éléments non ramifiés.

- (i) Dans $\text{Br}(k(X)^G)$, on a $H_{nr}^2(G, k(X)^\times) \cap \text{Br}(k) = 0$.
- (ii) Le groupe $H_{nr}^2(G, k(X)^\times) \subset H^2(G, k(X)^\times) \subset \text{Br}(k(Y))$ coïncide avec le groupe $\text{Br}_{nr}^0(k(Y))$.
- (iii) Le groupe $H_{nr}^2(G, k(X)^\times) = \text{Br}_{nr}^0(k(Y))$ est fini.

Démonstration. — On a des inclusions naturelles compatibles $\text{Br}(k) \hookrightarrow \text{Br}_{nr}(k(Y))$ et $\text{Br}(k) \hookrightarrow \text{Br}_{nr}(k(X))$, et cette dernière flèche est un isomorphisme car X est une variété k -rationnelle. Ceci établit (i) et (ii). L'énoncé de finitude (iii) vaut plus généralement pour les corps de fonctions de variétés projectives, lisses, géométriquement connexes qui sont géométriquement unirationnelles. Rappelons brièvement la démonstration. Pour toute k -variété projective, lisse, géométriquement intègre X , notant $\overline{X} = X \times_k \overline{k}$, on a une suite exacte

$$\text{Br}(k) \rightarrow \text{Ker}[\text{Br}(X) \rightarrow \text{Br}(\overline{X})] \rightarrow H^1(\mathfrak{g}, \text{Pic}(\overline{X})).$$

Si X est géométriquement unirationnelle, alors le module galoisien $\text{Pic}(\overline{X})$ est un groupe abélien libre de type fini, et le groupe $\text{Br}(\overline{X})$ est fini. Ceci suffit à conclure. \square

Notons que dans la décomposition d'un élément non ramifié de

$$H^2(G, k(X)^\times) \subset \text{Br}(k(Y))$$

en ses composantes p -primaires pour chaque premier p , chacune de celles-ci est non ramifiée.

L'énoncé suivant est une variante sur un corps non algébriquement clos d'un théorème de Fischer (cf. [4, Prop. 4.3]).

Proposition 2.2. — Supposons le groupe G abélien et la condition $\text{Cyc}(G, k)$ satisfaite. Il existe une k -variété Z telle que le produit $Y \times_k Z$ est k -birationnel à un espace projectif sur k .

Démonstration. — On dit que deux k -variétés W_1 et W_2 sont stablement k -birationnellement équivalentes s'il existe des espaces projectifs \mathbf{P}_k^r et \mathbf{P}_k^s tels que $W_1 \times_k \mathbf{P}_k^r$ est k -birationnel à $W_2 \times_k \mathbf{P}_k^s$. D'après une version du « lemme sans nom », pour un groupe fini G , des k -groupes spéciaux X_1 et X_2 et des plongements $G \subset X_1$ et $G \subset X_2$, le quotient X_1/G est stablement k -birationnel à X_2/G ([4, Prop. 4.9]). Les produits de groupes $SL_{n,k}$ (n variable) sont spéciaux. Si donc l'on a un plongement $G_1 \subset X_1$, un plongement $G_2 \subset X_2$ et un plongement $G_1 \times G_2 \subset X$, où chacun des groupes X et X_i est un groupe spécial linéaire, alors X/G est stablement k -birationnel à $(X_1 \times X_2)/(G_1 \times G_2) = X_1/G_1 \times X_2/G_2$.

Pour établir la proposition, on est donc ramené au cas où $G = \mathbf{Z}/p^m$ est un groupe abélien cyclique p -primaire, pour p un nombre premier. L'extension $k(\mu_{p^m})/k$ est cyclique si p est impair, et c'est encore le cas si $p = 2$ d'après l'hypothèse de la proposition.

Suivant Voskresenskii, rappelons comment cela se traduit en termes de tores. Soit $g = \text{Gal}(k(\mu_{p^m})/k)$ et soit $\hat{G} = \text{Hom}(G, \mu_{p^m}) = \mu_{p^m}$. Le groupe abélien libre de base les éléments de μ_{p^m} , qui est un g -module de permutation, s'envoie de façon évidente et g -équivalente sur le groupe μ_{p^m} . On note \hat{T} le noyau de cette application. On a donc la suite exacte de g -modules continus discrets :

$$0 \rightarrow \hat{T} \rightarrow \bigoplus_{\zeta \in \mu_{p^m}} \mathbf{Z} \cdot \zeta \rightarrow \hat{G} \rightarrow 0.$$

Par dualité, on obtient une suite exacte de k -groupes algébriques de type multiplicatif

$$1 \rightarrow G \rightarrow P \rightarrow T \rightarrow 1,$$

où $G = \mathbf{Z}/p^m$, T est un k -tore et P est un k -tore quasi-trivial, en particulier un k -groupe spécial. Ainsi ([4, Prop. 4.9]), pour tout k -plongement $G \subset X = SL_{n,k}$, le quotient X/G est stablement k -birationnel au k -tore T .

Le k -tore T est déployé par une extension cyclique. Rappelons comment ceci implique qu'il existe un k -tore T_1 tel que $T \times_k T_1$ est k -birationnel à un espace projectif, ce qui achèvera la démonstration.

On sait (Voskresenskii, Endo-Miyata) que tout k -tore T déployé par une extension galoisienne K/k admet une résolution flasque, c'est-à-dire qu'il existe une suite de k -tores déployés par l'extension K/k

$$1 \rightarrow F \rightarrow P \rightarrow T \rightarrow 1,$$

où P est un k -tore quasi-trivial, donc k -birationnel à un espace projectif et F est un k -tore flasque (voir [3, Lemme 3 p. 18] et [3, §5]). Supposons K/k cyclique. D'après un théorème de Endo et Miyata (voir [3, Prop. 2, p. 184]) tout k -tore flasque S déployé par une telle extension est un facteur direct d'un k -tore quasitrivial : il existe un k -tore S' tel que le k -tore $S \times_k S'$ soit k -isomorphe à un k -tore quasitrivial. Le théorème 90 de Hilbert et la résolution flasque ci-dessus assurent alors que la k -variété k -rationnelle P est k -birationnelle au produit $T \times_k F$. \square

Cette proposition implique immédiatement le théorème :

Théorème 2.3. — (i) Soit G abélien. Si la condition $\text{Cyc}(G, k)$ est satisfaite, alors $\text{Br}_{nr}^0(k(X)^G) = 0$.

(ii) Soit G abélien. On a $2 \cdot \text{Br}_{nr}^0(k(X)^G) = 0$.

Soit G fini quelconque.

(iii) Pour tout sous-groupe abélien $A \subset G$, l'image de $H_{nr}^2(G, k(X)^\times)$ dans $H^2(A, k(X)^\times)$ est annulée par 2.

(iv) Si la condition $Cyc(G, k)$ est satisfaite, pour tout sous-groupe abélien $A \subset G$, l'image de $H_{nr}^2(G, k(X)^\times)$ dans $H^2(A, k(X)^\times)$ est nulle. \square

La proposition 2.2 implique aussi un énoncé sur la cohomologie non ramifiée de degré quelconque (cf. [2]) :

Théorème 2.4. — Soient $i \geq 0$ et $m \geq 1$ des entiers, $j \in \mathbf{Z}$.

(i) Tout élément normalisé de $H_{nr}^i(k(X)^G, \mu_m^{\otimes j})$ a une image nulle dans $H^i(k(X)^A, \mu_m^{\otimes j})$ pour tout sous-groupe abélien $A \subset G$ d'ordre impair.

(ii) Si la condition $Cyc(G, k)$ est satisfaite, tout élément normalisé de $H_{nr}^i(k(X)^G, \mu_m^{\otimes j})$ a une image nulle dans $H^i(k(X)^A, \mu_m^{\otimes j})$ pour tout sous-groupe abélien $A \subset G$. \square

Notation Soit G un groupe fini. Pour tout G -module M et tout entier $i \geq 0$, on définit les sous-groupes

$$\text{III}_{ab}^i(G, M) \subset \text{III}_{bicyc}^i(G, M) \subset \text{III}_{cyc}^i(G, M) \subset H^i(G, M)$$

comme les sous-groupes formés des éléments de $H^i(G, M)$ dont la restriction à chaque sous-groupe cyclique, resp. bicyclique, resp. abélien $H \subset G$ est nulle. Par définition, un groupe bicyclique est un groupe abélien engendré par deux éléments.

Un G -module de permutation est un groupe abélien libre qui admet une base respectée par l'action de G . C'est une somme directe de G -modules $\mathbf{Z}[G/H]$ pour divers sous-groupes $H \subset G$. On a $H^1(G, \mathbf{Z}) = \text{Hom}(G, \mathbf{Z}) = 0$, et

$$\text{III}_{cyc}^2(G, \mathbf{Z}) \simeq \text{III}_{cyc}^1(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) = 0,$$

car tout caractère de G nul sur tout élément de G est nul. En utilisant le lemme de Shapiro, on étend ces résultats sur le G -module \mathbf{Z} aux G -modules de permutation. Ceci permet d'établir le :

Lemme 2.5. — Soit G un groupe fini.

(i) Pour M un G -module de permutation, on a $H^1(G, M) = 0$.

(ii) Pour M un G -module sans torsion, on a

$$H^1(G, M \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} H^2(G, M)$$

et, si l'action de G est triviale, $H^1(G, M) = 0$.

(iii) Pour M un G -module avec action triviale, les groupes

$$\text{III}_{ab}^1(G, M) \subset \text{III}_{bicyc}^1(G, M) \subset \text{III}_{cyc}^1(G, M)$$

sont nuls.

(iv) Pour M un G -module de permutation, les groupes

$$\text{III}_{ab}^2(G, M) \subset \text{III}_{bicyc}^2(G, M) \subset \text{III}_{cyc}^2(G, M)$$

sont nuls.

(v) Soit

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

une suite exacte de G -modules. Si C est un G -module de permutation, cette suite induit des isomorphismes $\mathrm{III}_{ab}^2(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{III}_{ab}^2(B)$, $\mathrm{III}_{bicyc}^2(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{III}_{bicyc}^2(B)$, $\mathrm{III}_{cyc}^2(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{III}_{cyc}^2(B)$.

(vi) Soit

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

une suite exacte de G -modules. Si C est un G -module sans torsion avec action triviale de G , cette suite induit des isomorphismes $\mathrm{III}_{ab}^2(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{III}_{ab}^2(B)$, $\mathrm{III}_{bicyc}^2(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{III}_{bicyc}^2(B)$, $\mathrm{III}_{cyc}^2(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{III}_{cyc}^2(B)$. \square

Théorème 2.6. — Supposons la condition $\mathrm{Cyc}(G, k)$ satisfaite. Soit $\mu(k)$ le groupe des racines de l'unité dans k .

(a) La flèche naturelle

$$H^2(G, k^\times) \rightarrow H^2(G, k(X)^\times)$$

induit un isomorphisme entre un sous-groupe de $\mathrm{III}_{ab}^2(G, k^\times)$ et le groupe $H_{nr}^2(G, k(X)^\times)$.

(b) La flèche $H^2(G, \mu(k)) \rightarrow H^2(G, k^\times)$ induit un isomorphisme de groupes

$$\mathrm{III}_{ab}^2(G, \mu(k)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{III}_{ab}^2(G, k^\times),$$

et la flèche composée

$$H^2(G, \mu(k)) \rightarrow H^2(G, k^\times) \rightarrow H^2(G, k(X)^\times)$$

identifie un sous-groupe du groupe $\mathrm{III}_{ab}^2(G, \mu(k))$ avec le groupe

$$\mathrm{Br}_{nr}^0(k(X)^G) \subset H^2(G, k(X)^\times).$$

Démonstration. — Toute fonction inversible sur $X = SL_{n,k}$ est constante, et le groupe de Picard de $SL_{n,k}$ est nul. La flèche diviseur $k(X)^\times \rightarrow \mathrm{Div}(X)$ sur le corps des fonctions de X donne donc naissance à une suite exacte de G -modules

$$1 \rightarrow k^\times \rightarrow k(X)^\times \rightarrow \mathrm{Div}(X) \rightarrow 0.$$

Le G -module $\mathrm{Div}(X)$ est le groupe abélien libre sur les points de codimension 1 de X . C'est donc un G -module de permutation.

Le lemme 2.5 (v) donne alors

$$\mathrm{III}_{ab}^2(G, k^\times) \xrightarrow{\sim} \mathrm{III}_{ab}^2(G, k(X)^\times).$$

D'après le théorème 2.3, on a une injection

$$H_{nr}^2(G, k(X)^\times) \hookrightarrow \mathrm{III}_{ab}^2(G, k(X)^\times),$$

ce qui établit (a).

Pour tout corps k on a la suite exacte de G -modules (avec action triviale)

$$1 \rightarrow \mu(k) \rightarrow k^\times \rightarrow k^\times / \mu(k) \rightarrow 1$$

où $R := k^\times / \mu(k)$ est sans torsion. D'après le lemme 2.5 (vi), on a

$$\mathrm{III}_{ab}^2(G, \mu(k)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{III}_{ab}^2(G, k^\times).$$

L'énoncé (b) résulte alors de l'énoncé (a). \square

Remarque 2.7. — Pour la torsion impaire, ou sous l'hypothèse $\mathrm{Cyc}(G, k)$, cet argument donne une autre démonstration de la finitude de $\mathrm{Br}_{nr}^0(k(X)^G)$ (lemme 2.1). Il suffit d'observer que le groupe $H^2(G, \mu(k))$, et donc aussi $\mathrm{III}_{ab}^2(G, \mu(k)) \subset H^2(G, \mu(k))$, est fini. Soit l premier divisant l'ordre de G . Le groupe $\mu(k)\{l\}$ est soit fini soit isomorphe à $\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l$. Dans les deux cas, le groupe $H^2(G, \mu(k)\{l\})$ est fini. C'est clair dans le premier cas. Dans le second, $H^2(G, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l) \xrightarrow{\sim} H^3(G, \mathbf{Z})\{l\}$.

Corollaire 2.8. — Soit $\mu(k)$ le groupe des racines de l'unité dans k .

(a) Si le groupe $\mu(k)$ est fini et d'ordre premier à celui de G (ce qui implique que l'ordre de G est impair et $\mathrm{Cyc}(G, k)$ satisfaite), alors $\mathrm{Br}_{nr}^0(k(X)^G) = 0$.

(b) Pour $k = \mathbf{Q}$ et G d'ordre impair, on a $\mathrm{Br}(\mathbf{Q}) = \mathrm{Br}_{nr}(\mathbf{Q}(X)^G)$.

(c) Soit $k = \mathbf{R}$.

(c1) On a $\mathrm{Br}_{nr}^0(\mathbf{R}(X)^G) \subset \mathrm{III}_{ab}^2(G, \mathbf{Z}/2)$.

(c2) On a $2 \cdot \mathrm{Br}_{nr}(\mathbf{R}(X)^G) = 0$.

(c3) Si les 2-sous-groupes de Sylow de G sont abéliens, alors

$$\mathrm{Br}_{nr}^0(\mathbf{R}(X)^G) = 0.$$

Démonstration. — Dans le cas (a), on a $H^2(G, \mu(k)) = 0$, car ce groupe est annulé par l'ordre de G et par l'ordre de $\mu(k)$. Le théorème 2.6 donne alors (a), et (b) est alors une conséquence immédiate, puisque $\mu(\mathbf{Q}) = \mathbf{Z}/2$. Sur \mathbf{R} , la condition $\mathrm{Cyc}(G, \mathbf{R})$ est trivialement satisfaite, et $\mu(\mathbf{R}) = \mathbf{Z}/2$. Ceci donne (c1), et les énoncés (c2) et (c3) s'en suivent. \square

Remarque 2.9. — Dans la situation du (a) du corollaire 2.8 ci-dessus, sur un corps de nombres, par une méthode arithmétique, Demarche [5, Thm. 5] a établi la nullité du groupe $\mathrm{Br}_{nr,1}^0(k(X)^G) \subset \mathrm{Br}_{nr}^0(k(X)^G)$.

Remarque 2.10. — Comme me l'a indiqué C. Demarche, les p -groupes qu'il étudie dans [5, §6] fournissent, pour $p = 2$, un exemple de groupe fini G d'ordre 64 tel que le groupe de Brauer non ramifié normalisé $\mathrm{Br}_{nr}^0(\mathbf{Q}(X)^G)$ possède un élément algébrique qui ne s'annule pas dans $\mathrm{Br}_{nr}^0(\mathbf{R}(X)^G)$.

Théorème 2.11. — Supposons que pour tout groupe cyclique $\mathbf{Z}/m \subset G$, on a $\mu_m(k) = \mu_m(\bar{k})$. On a alors des isomorphismes de groupes finis

$$\mathrm{III}_{ab}^2(G, k^\times) \xrightarrow{\sim} \mathrm{III}_{bicyc}^2(G, k^\times) \xrightarrow{\sim} H_{nr}^2(G, k(X)^\times)$$

et

$$\mathrm{III}_{ab}^2(G, \mu(k)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{III}_{bicyc}^2(G, \mu(k)) \xrightarrow{\sim} H_{nr}^2(G, k(X)^\times).$$

Démonstration. — L'hypothèse faite sur les racines de l'unité implique que $Cyc(G, k)$ est satisfaite.

D'après le théorème 2.3, on a les inclusions

$$H_{nr}^2(G, k(X)^\times) \subset \mathrm{III}_{ab}^2(G, k(X)^\times) \subset \mathrm{III}_{bicyc}^2(G, k(X)^\times).$$

L'hypothèse faite sur les racines de l'unité implique aussi que pour tout anneau de valuation discrète de rang 1 de $k(X)^G$, contenant k , l'action des sous-groupes de décomposition de G sur l'inertie est triviale. On peut donc copier l'argument de Bogomolov (cf. [4, Thm. 6.1, Thm. 7.1]), qui mène à l'inclusion

$$\mathrm{III}_{bicyc}^2(G, k(X)^\times) \subset H_{nr}^2(G, k(X)^\times).$$

Dans $H^2(G, k(X)^\times)$, on a donc les égalités

$$\mathrm{III}_{ab}^2(G, k(X)^\times) = \mathrm{III}_{bicyc}^2(G, k(X)^\times) = H_{nr}^2(G, k(X)^\times).$$

Comme dans la démonstration du théorème 2.6, on déduit du lemme 2.5 les isomorphismes

$$\begin{aligned} \mathrm{III}_{ab}^2(G, k^\times) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{III}_{ab}^2(G, k(X)^\times) \\ \mathrm{III}_{bicyc}^2(G, k^\times) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{III}_{bicyc}^2(G, k(X)^\times). \\ \mathrm{III}_{bicyc}^2(G, \mu(k)) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{III}_{bicyc}^2(G, k^\times) \\ \mathrm{III}_{ab}^2(G, \mu(k)) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{III}_{ab}^2(G, k^\times). \end{aligned}$$

□

Notons $\hat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) = \mathrm{Hom}(G^{ab}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ le groupe des caractères du groupe G .

Théorème 2.12. — *Supposons que le corps k ne contient qu'un nombre fini de racines de l'unité, et supposons la condition $Cyc(G, k)$ satisfaite.*

(i) *Soit $r > 0$ tel que $\mu(k) = \mu_r(k)$. Le groupe de Brauer non ramifié algébrique normalisé*

$$\mathrm{Ker}[\mathrm{Br}_{nr}^0(k(X)^G) \rightarrow \mathrm{Br}(\bar{k}(X)^G)] = \mathrm{Ker}[H_{nr}^2(G, k(X)^\times) \rightarrow H^2(G, \bar{k}(X)^\times)]$$

s'identifie à un sous-groupe de $\mathrm{Ker}[\hat{G}/r \rightarrow \prod_A \hat{A}/r]$, où A parcourt les sous-groupes abéliens de G .

(ii) *Si G est un groupe simple non abélien, on a $\mathrm{Br}_{nr}^0(k(X)^G) = 0$.*

Démonstration. — Le théorème 2.6 donne un plongement

$$\mathrm{Br}_{nr}^0(k(X)^G) \hookrightarrow \mathrm{III}_{ab}^2(G, \mu(k)) \subset H^2(G, \mu(k))$$

et donc aussi un plongement

$$\mathrm{Br}_{nr}^0(k(X)^G) \hookrightarrow \mathrm{III}_{ab}^2(G, \mu_r(k)).$$

Par ailleurs sur \bar{k} , d'après Bogomolov (Thm. 2.11 ci-dessus) on a un isomorphisme

$$\mathrm{Br}_{nr}^0(\bar{k}(X)^G) \xrightarrow{\cong} \mathrm{III}_{ab}^2(G, \mu(\bar{k})) \subset H^2(G, \mu(\bar{k})).$$

Les flèches $\mathrm{Br}_{nr}^0(k(X)^G) \rightarrow H^2(G, \mu(k))$ et $\mathrm{Br}_{nr}^0(\bar{k}(X)^G) \rightarrow H^2(G, \mu(\bar{k}))$ sont compatibles, comme on le vérifie immédiatement. L'énoncé (i) résulte alors de la suite exacte de G -modules à action triviale

$$1 \rightarrow \mu_r(k) \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1) \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1) \rightarrow 1$$

définie par la multiplication par r sur $\mu(\bar{k}) = \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1)$.

Si G est comme en (ii), alors d'une part $\hat{G} = 0$, d'autre part

$$\mathrm{Br}_{nr}^0(\bar{k}(X)^G) = 0,$$

d'après Kunyavskii [8]. L'énoncé (ii) résulte donc de (i). \square

Remarque 2.13. — Le théorème 2.12 s'applique aux corps de nombres et plus généralement aux corps de type fini sur un corps de nombres, mais aussi aux corps p -adiques et aussi aux réels. Sur de tels corps, on voit donc que si le groupe G n'a pas de caractères, le groupe de Brauer non ramifié algébrique normalisé est nul. Sur un corps de nombres, ceci avait été établi par Harari [7, Prop. 4], qui donne une formule pour le groupe de Brauer non ramifié algébrique normalisé comme sous-groupe de $H^1(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1)))$, formule qui implique clairement que ce groupe est nul si G n'a pas de caractères.

Pour les réels, on obtient l'énoncé suivant.

Corollaire 2.14. — *Soit $k = \mathbf{R}$. Le groupe de Brauer non ramifié algébrique normalisé de $\mathbf{R}(X)^G$*

$$\mathrm{Ker}[\mathrm{Br}_{nr}^0(\mathbf{R}(X)^G) \rightarrow \mathrm{Br}(\mathbf{C}(X)^G)]$$

s'identifie à un sous-groupe de $\mathrm{Ker}[\hat{G}/2 \rightarrow \prod_A \hat{A}/2]$, où A parcourt les sous-groupes abéliens de G . \square

Références

- [1] F. A. Bogomolov, Le groupe de Brauer des espaces quotients de représentations linéaires (en russe), *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **51** (1987) 485–516, 688.
- [2] J.-L. Colliot-Thélène, Birational invariants, purity and the Gersten conjecture, in *K-Theory and Algebraic Geometry : Connections with Quadratic Forms and Division Algebras*, AMS Summer Research Institute, Santa Barbara 1992, ed. W. Jacob and A. Rosenberg, *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics* **58**, Part I (1995) p. 1–64.
- [3] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, La R-équivalence sur les tores. *Ann. Sc. Éc. Norm. Sup.* **10** (1977) 175–229.
- [4] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, The rationality problem for fields of invariants under linear algebraic groups (with special regards to the rationality problem), in *Proceedings of the International Colloquium on Algebraic groups and Homogeneous Spaces* (Mumbai 2004), ed. V. Mehta, TIFR Mumbai, Narosa Publishing House (2007), 113–186.
- [5] C. Demarche, Groupe de Brauer non ramifié d’espaces homogènes à stabilisateurs finis, *Math. Annalen* **346** (2010) 949–968.
- [6] A. Grothendieck, Le groupe de Brauer I, II, III, in *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, North-Holland, Amsterdam, Masson, Paris, 1968.
- [7] D. Harari, Quelques propriétés d’approximation reliées à la cohomologie galoisienne d’un groupe fini, *Bull. Soc. Math. France* **135**(4) (2007) 549–564.
- [8] B. È. Kunyavskii, The Bogomolov multiplier of finite simple groups, in *Cohomological and geometric approaches to rationality problems*, 209–217, *Progr. Math.* **282**, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2010.

9 janvier 2012

J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, C.N.R.S., Université Paris Sud, Mathématiques, Bâtiment 425,
91405 Orsay Cedex, France • E-mail : jlct@math.u-psud.fr